УДК 517.927.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-74-99

ОБ ИЗУЧЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

© С. И. Митрохин

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Аннотация. Изучена краевая задача для дифференциального оператора высокого четного порядка, коэффициенты которого являются разрывными функциями в некоторой внутренней точке отрезка, на котором рассматривается оператор. В точке разрыва коэффициентов требуется выполнение некоторых условий «сопряжения», которые следуют из физических условий. Граничные условия рассматриваемой краевой задачи являются разделенными и зависят от нескольких параметров. Тем самым одновременно изучаются спектральные свойства целого семейства дифференциальных операторов. Весовая функция оператора является кусочно-постоянной на отрезке задания дифференциального оператора. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика решений дифференциальных уравнений, определяющих изучаемый оператор. С помощью этой асимптотики изучены условия «сопряжения». Полученные формулы позволяют исследовать граничные условия рассматриваемой краевой задачи. В результате выведено уравнение на собственные значения исследуемого оператора. Доказано, что собственные значения оператора являются корнями некоторой целой функции. Изучена индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения оператора. Доказано, что спектр оператора является дискретным. В различных секторах индикаторной диаграммы найдена асимптотика собственных значений изучаемого оператора, зависящая от параметров граничных условий. Найденные формулы позволяют находить асимптотику собственных функций оператора и вычислять регуляризованные следы этого оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор; краевая задача; спектральный параметр; весовая функция; асимптотика собственных значений; собственные функции

Рассмотрим дифференциальный оператор высокого четного порядка, задаваемый на отрезке $[0;\pi]$ дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} y_1^{(10)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^{10} y_1(x), \quad 0 \leqslant x < x_1, \quad a > 0, & (1) \\ y_2^{(10)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^{10} y_2(x), \quad x_1 < x \leqslant \pi, \quad b > 0, & (2) \end{cases}$$

с условиями «сопряжения» в точке x_1 разрыва коэффициентов

$$y_1(x_1-0)=y_2(x_1+0);\quad \frac{y_1^{(m)}(x_1-0)}{a^m}=\frac{y_2^{(m)}(x_1+0)}{b^m},\quad m=1,2,\ldots,9, \tag{3}$$

с разделенными граничными условиями вида

$$\begin{gathered} y_1^{(m_1)}(0)=y_1^{(m_2)}(0)=\cdots=y_1^{(m_9)}(0)=y_2^{(n_1)}(\pi)=0, \\ m_1<m_2<\cdots<m_9;\quad m_p,n_1\in\{0,1,2,\ldots,9\},\quad p=1,2,\ldots,9. \end{gathered} \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения (1), (2) можно записать в виде одного уравнения $y_1^{(10)}(x)+q(x)y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, где

$$y(x)=\left[\begin{array}{l} y_1(x),\ 0\leqslant x<x_1 \\ y_2(x),\ x_1<x\leqslant\pi; \end{array}\right. q(x)=\left[\begin{array}{l} q_1(x),\ 0\leqslant x<x_1 \\ q_2(x),\ x_1<x\leqslant\pi; \end{array}\right. \rho(x)=\left[\begin{array}{ll} a^{10}, & a>0,\ 0\leqslant x<x_1 \\ b^{10}, & b>0,\ x_1<x\leqslant\pi. \end{array}\right.$$

При этом число λ называется спектральным параметром, функция $q(x)$ называется потенциалом, функция $\rho(x)$ – весовая функция. Мы предполагаем, что выполнены следующие условия гладкости потенциала $q(x)$:

$$\begin{gathered} q_1(x)\in C^9[0;x_1);\quad q_2(x)\in C^9(x_1;\pi]; \\ \exists\lim_{x\to x_1-0}q_1(x)=q_1(x_1)\neq\infty;\quad \exists\lim_{x\to x_1+0}q_2(x)=q_2(x_1)\neq\infty. \end{gathered} \tag{5}$$

Краевые задачи вида (1)–(3) в случае дифференциальных уравнений второго и четвертого порядка описывают продольные и поперечные колебания стержней и балок, составленных из материалов различной плотности. Изучение дифференциальных операторов порядка выше четвертого является актуальной задачей настоящего времени ввиду сложностей теоретического исследования. Это также важно для развития теории дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами.

Асимптотика спектра дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами изучена в работах [1–4]. Дифференциальные операторы с кусочно-гладкими коэффициентами исследовались в работах [5–9]. Случай суммируемых коэффициентов начал изучаться недавно и продемонстрирован в работах [10–15]. Во всех этих работах весовая функция была постоянной (чаще всего равной единице). Дифференциальные операторы второго порядка с кусочно-постоянными весовыми функциями исследовались в работах [16–18]. Операторы порядка выше второго с кусочно-постоянными весовыми функциями ранее фактически не исследовались ввиду сложностей теоретического характера. Новизна данной работы заключается в том, что продемонстрирован метод доказательства дискретности спектра исследуемой краевой задачи (порядок которой больше второго). Исследование операторов с кусочно-гладкими весовыми функциями на данный момент не представляется возможным из-за сложности практического характера.

§ 1. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1) и (2) при больших значениях спектрального параметра λ. Введем следующие обозначения: $\lambda=s^{10}$, $s=\sqrt[10]{\lambda}$, при этом $\sqrt[10]{1}=+1$. Пусть w_k $(k=1,2,\ldots,10)$ – различные корни десятой степени из единицы

$$
\begin{gathered}
w_k^{10}=1,\quad w_k=e^{\frac{2\pi i}{10}(k-1)}\ \ (k=1,2,\ldots,10);\quad w_1=1;\\
w_2=e^{\frac{2\pi i}{10}}=\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)=z\neq 0;\\
w_3=e^{\frac{4\pi i}{10}}=\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{10}\right)=z^2;\\
w_4=z^3;\ldots;w_m=z^{m-1}\ \ (m=1,2,\ldots,10);\quad w_{m+10}=w_m.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Числа w_k $(k=1,2,\ldots,10)$ из (6) делят единичную окружность на десять равных частей, при этом они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\sum_{k=1}^{10}w_k^m=0,\ m=1,2,\ldots,9;\quad \sum_{k=1}^{10}w_k^m=10,\ m=0,\ m=10. \tag{7}
$$

Методами монографии [19, гл. 2] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *при условии гладкости* (5) *имеет следующий вид:*

$$
y_1(x,s)=\sum_{k=1}^{10}C_{1k}y_{1k}(x,s);\quad \frac{y_1^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{10}C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m)}(x,s)}{(as)^m},\ m=1,2,\ldots,9, \tag{8}
$$

где C_{1k} $(k=1,2,\ldots,10)$ *– произвольные постоянные, при этом справедливы асимптотические формулы и оценки*

$$
y_{1k}(x,s)=e^{aw_ksx}\left[1+\frac{A_{9,k}(x)}{s^9}+\frac{A^0_{10,k}(x)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^{11}}\right)\right], \tag{9}
$$
$$
k=1,2,\ldots,10,
$$

$$
\frac{y_{1k}^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^me^{aw_ksx}\left[1+\frac{A_{9,k}(x)}{s^9}+\frac{A^m_{10,k}(x)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^{11}}\right)\right], \tag{10}
$$
$$
k=1,2,\ldots,10;\quad m=1,2,\ldots,9.
$$

При этом для коэффициентов разложений (9), (10) справедливы следующие формулы:

$$
A_{9,k}(x)=-\frac{w_k}{10a^9}\int_0^x q_1(t)dt;\quad A_{9,k}(0)=0,\quad k=1,2,\ldots,10; \tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
A^0_{10,k}(x)=\frac{9q_1(x)-9q_1(0)}{20a^{10}};\quad A^1_{10,k}(x)=\frac{7q_1(x)-9q_1(0)}{20a^{10}};\ldots;\\
A^m_{10,k}(x)=\frac{(9-2m)q_1(x)-9q_1(0)}{20a^{10}},\quad m=1,2,\ldots,9;\\
A^8_{10,k}(x)=\frac{-7q_1(x)-9q_1(0)}{20a^{10}};\quad A^9_{10,k}(x)=\frac{-9q_1(x)-9q_1(0)}{20a^{10}};\\
k=1,2,\ldots 10;\quad m=1,2,\ldots,9.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

При этом выполняются следующие начальные условия и свойства:

$$A^0_{10,k}(0)=0;\ A^1_{10,k}(0)=\frac{-2q_1(0)}{20a^{10}};\ \ldots;\ A^m_{10,k}(0)=\frac{(-2m)q_1(0)}{20a^{10}};\ldots;\ A^8_{10,k}(0)=\frac{(-16)q_1(0)}{20a^{10}};$$

$$A^9_{10,k}(0)=\frac{(-18)q_1(0)}{20a^{10}};\quad k=1,2,\ldots,10;\ m=1,2,\ldots,9; \tag{13}$$

$$A^0_{10,k}(x)+A^1_{10,k}(x)+\cdots+A^8_{10,k}(x)+A^9_{10,k}(x)=\frac{-90}{20a^{10}}; \tag{14}$$

$$\sum_{m=0}^{9}A^m_{10,k}(0)=\sum_{m=0}^{9}A^m_{10,k}(x)=\frac{-90}{20a^{10}},\quad k=1,2,\ldots,10, \tag{15}$$

то есть эти суммы не зависят от k.

Аналогичным образом устанавливаются следующие утверждения и свойства.

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* (2) *при условии гладкости* (5) *потенциала* $q(x)$ *имеет следующий вид:*

$$y_2(x,s)=\sum_{k=1}^{10}C_{2k}y_{2k}(x,s);\quad \frac{y_2^{(m)}(x,s)}{(bs)^m}=\sum_{k=1}^{10}C_{2k}\frac{y_{2k}^{(m)}(x,s)}{(bs)^m},\quad m=1,2,\ldots,9, \tag{16}$$

где C_{2k} $(k=1,2,\ldots,10)$ – *произвольные постоянные, причем для фундаментальной системы решений* $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{10}$ *справедливы асимптотические формулы и оценки:*

$$y_{2k}(x,s)=e^{bw_ksx}\left[1+\frac{B_{9,k}(x)}{s^9}+\frac{B^0_{10,k}(x)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{11}}\right)\right],\quad k=1,2,\ldots,10, \tag{17}$$

$$\frac{y_{2k}^{(m)}(x,s)}{(bs)^m}=w_k^me^{bw_ksx}\left[1+\frac{B_{9,k}(x)}{s^9}+\frac{B^m_{10,k}(x)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{11}}\right)\right],$$

$$k=1,2,\ldots,10,\ m=1,2,\ldots,9; \tag{18}$$

$$B_{9,k}(x)=-\frac{w_k}{10b^9}\int_{x_1}^{x}q_2(t)dt;\quad B_{9,k}(0)=0; \tag{19}$$

$$B^0_{10,k}(x)=\frac{9q_2(x)-9q_2(x_1)}{20b^9};\quad B^1_{10,k}(x)=\frac{7q_2(x)-9q_2(x_1)}{20b^9};\ldots;$$

$$B^m_{10,k}(x)=\frac{(9-2m)q_2(x)-9q_2(x_1)}{20b^9},\quad k=1,2,\ldots,10;\quad m=0,1,2,\ldots,9;\ldots; \tag{20}$$

$$B^8_{10,k}(x)=\frac{-7q_2(x)-9q_2(x_1)}{20b^9};\quad B^9_{10,k}(x)=\frac{-9q_2(x)-9q_2(x_1)}{20b^9};$$

$$B^0_{10,k}(x_1)=0;\quad B^1_{10,k}(x_1)=\frac{-2q_2(x_1)}{20b^9};\ldots;B^m_{10,k}(x_1)=\frac{(-2m)q_2(x_1)}{20b^9};\ldots; \tag{21}$$

$$B^8_{10,k}(x_1)=\frac{-16q_2(x_1)}{20b^9};\quad B^9_{10,k}(x_1)=\frac{-18q_2(x_1)}{20b^9};\quad k=1,2,\ldots,10;\ m=0,1,2,\ldots,9;$$

$$\sum_{m=0}^{9}B^m_{10,k}(x)=\sum_{m=0}^{9}B^m_{10,k}(x_1)=\frac{-90}{20b^9},\quad k=1,2,\ldots,10, \tag{22}$$

то есть эти суммы не зависят от переменной k.

§ 2. Изучение условий «сопряжения» (3). Из условий «сопряжения» (3) и формул (8), (16) имеем:

$$\begin{cases} y_2(x_1+0;s) \overset{(3)}{=} y_1(x_1-0;s) \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{10} C_{2k} y_{2k}(x,s)\Big|_{x=x_1+0} = \sum_{k=1}^{10} C_{1k} y_{1k}(x,s)\Big|_{x=x_1-0}; \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_1+0;s)}{(bs)^m} \overset{(3)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_1-0;s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{10} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_1+0;s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^{10} C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_1-0;s)}{(as)^m}, \quad m=1,2,\ldots,9. \end{cases} \tag{23}$$

Система (23) представляет собой систему из десяти линейных однородных уравнений с десятью неизвестными $C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2,10}$, переменные $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1,10}$ являются при этом параметрами. Определителем этой системы является определитель Вронского функций $y_{21}(x,s), y_{22}(x,s), \ldots, y_{2,10}(x,s)$, который не зависит от x и не равен нулю ни в одной точке отрезка $[0;\pi]$. Применим теорему Крамера: решение системы (23) единственно и находится по следующим формулам:

$$C_{21} = \frac{\Delta_1}{\Delta_{20}(x,s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_{20}(x,s)}; \ldots; \ C_{2,10} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}(x,s)}, \tag{24}$$

где

$$\Delta_{20}(x,s) = \Delta_{20}(x_1,s) = \Delta_{20}(s) = \det \mathrm{Wr}[y_{21}(x,s); y_{22}(x,s); \ldots; y_{2,10}(x,s)] =$$
$$= \begin{vmatrix} y_{21}(x,s) & y_{22}(x,s) & \ldots & y_{2,9}(x,s) & y_{2,10}(x,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \ldots & \dfrac{y'_{2,9}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{2,10}(x,s)}{bs} \\ \dfrac{y''_{21}(x,s)}{(bs)^2} & \dfrac{y''_{22}(x,s)}{(bs)^2} & \ldots & \dfrac{y''_{2,9}(x,s)}{(bs)^2} & \dfrac{y''_{2,10}(x,s)}{(bs)^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y^{(9)}_{21}(x,s)}{(bs)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{22}(x,s)}{(bs)^9} & \ldots & \dfrac{y^{(9)}_{2,9}(x,s)}{(bs)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{2,10}(x,s)}{(bs)^9} \end{vmatrix}_{x=x_1+0} \neq 0, \tag{25}$$

определители Δ_m $(m = 1, 2, \ldots, 10)$ формулы (24) получаются из определителя $\Delta_{20}(x,s)$ формулы (25) заменой m-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{10} C_{1k} y_{1k}(x,s); \sum_{k=1}^{10} C_{1k} \frac{y'_{1k}(x,s)}{as}; \ldots; \sum_{k=1}^{10} C_{1k} \frac{y^{(9)}_{1k}(x,s)}{(as)^9} \right)^*_{x=x_1-0}. \tag{26}$$

Например, имеем

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{cccc} \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} y_{1k}(x,s)\right]_{x_1-0} & y_{22}(x,s) & \dots & y_{2,10}(x,s) \\ \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} \dfrac{y'_{1k}(x,s)}{as}\right]_{x_1-0} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{2,10}(x,s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} \dfrac{y^{(9)}_{1k}(x,s)}{(as)^9}\right]_{x_1-0} & \dfrac{y^{(9)}_{22}(x,s)}{(bs)^9} & \dots & \dfrac{y^{(9)}_{2,10}(x,s)}{(bs)^9} \end{array} \right|_{x=x_1+0}, \tag{27}$$

$$\Delta_2 = \left| \begin{array}{ccccc} y_{21}(x,s) & \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} y_{1k}(x,s)\right]_{x_1-0} & y_{23}(x,s) & \dots & y_{2,10}(x,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} \dfrac{y'_{1k}(x,s)}{as}\right]_{x_1-0} & \dfrac{y'_{23}(x,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{2,10}(x,s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(9)}_{21}(x,s)}{(bs)^9} & \left[\sum\limits_{k=1}^{10} C_{1k} \dfrac{y^{(9)}_{1k}(x,s)}{(as)^9}\right]_{x_1-0} & \dfrac{y^{(9)}_{23}(x,s)}{(bs)^9} & \dots & \dfrac{y^{(9)}_{2,10}(x,s)}{(bs)^9} \end{array} \right|_{x=x_1+0}. \tag{28}$$

Раскладывая определитель Δ_1 из (27) по первому столбцу, получаем

$$\Delta_1 = C_{11}\Delta_{11} + C_{12}\Delta_{12} + \dots + C_{1,10}\Delta_{1,10}, \tag{29}$$

$$\Delta_{1k} = \left| \begin{array}{ccccc} y_{1k}(x,s) & y_{22}(x,s) & y_{23}(x,s) & \dots & y_{2,10}(x,s) \\ \dfrac{y'_{1k}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{23}(x,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{2,10}(x,s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(9)}_{1k}(x,s)}{(as)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{22}(x,s)}{(bs)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{23}(x,s)}{(bs)^9} & \dots & \dfrac{y^{(9)}_{2,10}(x,s)}{(bs)^9} \end{array} \right|_{x=x_1\pm 0}, \quad k = 1, 2, \dots, 10. \tag{30}$$

Раскладывая определитель Δ_2 из (28) на сумму определителей по второму столбцу, находим

$$\Delta_2 = C_{11}\Delta_{21} + C_{12}\Delta_{22} + \dots + C_{1,10}\Delta_{2,10}, \tag{31}$$

$$\Delta_{1k} = \left| \begin{array}{ccccc} y_{21}(x,s) & y_{1k}(x,s) & y_{23}(x,s) & \dots & y_{2,10}(x,s) \\ \dfrac{y'_{21}(x,s)}{bs} & \dfrac{y'_{1k}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{23}(x,s)}{bs} & \dots & \dfrac{y'_{2,10}(x,s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(9)}_{21}(x,s)}{(bs)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{1k}(x,s)}{(as)^9} & \dfrac{y^{(9)}_{23}(x,s)}{(bs)^9} & \dots & \dfrac{y^{(9)}_{2,10}(x,s)}{(bs)^9} \end{array} \right|_{x=x_1\pm 0}, \quad k = 1, 2, \dots, 10. \tag{32}$$

Аналогичным способом выводятся формулы

$$\Delta_3 = C_{11}\Delta_{31} + C_{12}\Delta_{32} + \dots + C_{1,10}\Delta_{3,10}; \dots;$$
$$\Delta_m = C_{11}\Delta_{m1} + C_{12}\Delta_{m2} + \dots + C_{1,10}\Delta_{m,10},\ m = 1, 2, \dots, 10; \dots; \tag{33}$$

$$\Delta_{10} = C_{11}\Delta_{10,1} + C_{12}\Delta_{10,2} + \dots + C_{1,10}\Delta_{10,10},$$

при этом определитель Δ_{mn} $(m, n = 1, 2, \dots, 10)$ в силу формулы (26) получается из определителя $\Delta_{20}(x, s)$ из (25) заменой m-го столбца на столбец

$$\left(y_{1n}(x,s); \frac{y'_{1n}(x,s)}{as}; \frac{y''_{1n}(x,s)}{(as)^2} \dots; \frac{y^{(9)}_{1n}(x,s)}{(as)^9} \right)^*_{x=x_1-0}.$$

Обозначим через Δ_{00} определитель Вандермонда чисел $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ из (6), (7):

$$\Delta_{00} = \det \mathrm{Wand}'\mathrm{s}\,(w_1, w_2, \dots, w_{10}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_9 & w_{10} \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_9^2 & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^9 & w_2^9 & \dots & w_9^9 & w_{10}^9 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,\dots,10}} (w_k - w_m) \neq 0. \tag{34}$$

Пусть матрица (ν_{mn}) – матрица алгебраических миноров к элементам Δ_{00mn} определителя Δ_{00} из (34). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Матрица алгебраических миноров* (ν_{mn}) *имеет следующий вид:*

$$(\nu_{mn}) = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \dots & \nu_{1,9} & \nu_{1,10} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} & \dots & \nu_{2,9} & \nu_{2,10} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} & \dots & \nu_{3,9} & \nu_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \nu_{9,1} & \nu_{9,2} & \nu_{9,3} & \dots & \nu_{9,9} & \nu_{9,10} \\ \nu_{10,1} & \nu_{10,2} & \nu_{10,3} & \dots & \nu_{10,9} & \nu_{10,10} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_{00}}{10} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -w_1^{-1} & w_2^{-1} & -w_3^{-1} & w_4^{-1} & \dots & -w_9^{-1} & w_{10}^{-1} \\ w_1^{-2} & -w_2^{-2} & w_3^{-2} & -w_4^{-2} & \dots & w_9^{-2} & -w_{10}^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{-8} & -w_2^{-8} & w_3^{-8} & -w_4^{-8} & \dots & w_9^{-8} & -w_{10}^{-8} \\ -w_1^{-9} & w_2^{-9} & -w_3^{-9} & w_4^{-9} & \dots & -w_9^{-9} & w_{10}^{-9} \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Для проверки справедливости формул (35) теоремы 3 достаточно разложить определитель Δ_{00} из (34) по строчкам и по столбцам и получить верные равенства (хотя есть и строгое доказательство теоремы 3).

Для вычисления в явном виде определителей Δ_{1k} $(k = 1, 2, \dots, 10)$ формул (30) и (29) воспользуемся асимптотическими формулами (9), (10) и (17), (18):

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} e^{ak}\left[1 + \dfrac{A_{9,k}}{s^9} + \dfrac{A^0_{10,k}}{s^{10}} + \dots\right] & e^{b2}\left[1 + \dfrac{B_{9,2}}{s^9} + \dfrac{B^0_{10,2}}{s^{10}} + \dots\right] & \dots & u_{1,10} \\ w_k e^{ak}\left[1 + \dfrac{A_{9,k}}{s^9} + \dfrac{A^1_{10,k}}{s^{10}} + \dots\right] & w_2 e^{b2}\left[1 + \dfrac{B_{9,2}}{s^9} + \dfrac{B^1_{10,2}}{s^{10}} + \dots\right] & \dots & u_{2,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^9 e^{ak}\left[1 + \dfrac{A_{9,k}}{s^9} + \dfrac{A^9_{10,k}}{s^{10}} + \dots\right] & w_2^9 e^{b2}\left[1 + \dfrac{B_{9,2}}{s^9} + \dfrac{B^9_{10,2}}{s^{10}} + \dots\right] & \dots & u_{10,10} \end{vmatrix}, \tag{36}$$

где введены обозначения $e^{ak} = e^{aw_k x_1}$, $e^{bm} = e^{bw_m x_1}$, все функции берутся в точке x_1 (то есть при $x = x_1 \pm 0$), «$+\dots$»=«$+\underline{O}(\frac{1}{s^{11}})$», $k = 1,2,\dots,10$, $u_{n,10} = w_{10}^{n-1} e^{bw_{10}sx_1}\left[1 + \frac{B_{9,10}}{s^9} + \frac{B_{10,10}^9}{s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|bx}}{s^{11}}\right)\right]$, $n = 1,2,\dots,10$, при этом в силу формул (19) $B_{9,k}(x_1) = 0$.

Из первого столбца определителя Δ_{1k} $(k = 1,2,\dots,10)$ из (36) вынесем множитель $e^{aw_k s x_1}$, из второго – множитель $^{bw_2 sx_1}, \dots$, из десятого столбца – множитель $e^{bw_{10}sx_1}$, воспользуемся формулой $w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{10} \overset{(7)}{=} 0$, затем получившийся определитель разложим по столбцам на сумму определителей, в результате получим

$$\Delta_{1k}(x_1,s) = e^{aw_k s x_1} e^{bw_1 s x_1}\left[\Delta_{1k0} + \frac{1}{s^9}\Delta_{1k0}\left(A_{9,k}(x_1) + \sum_{m=2}^{10} B_{9,m}(x_1)\right) + \frac{H_{1k}(x_1)}{s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right], \quad (37)$$
$$k = 1,2,\dots,10,$$

при этом $\sum_{m=1}^{10} B_{9,m}(x_1) \overset{(19)}{=} 0$,

$$\Delta_{1k0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_k & w_2 & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_k^2 & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^9 & w_2^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix} \overset{(34)}{=} \left[\begin{array}{l} \Delta_{00}, \quad k = 1; \\ 0, \quad k = 2,3,\dots,10, \end{array}\right. \quad (38)$$

$$H_{1k} = H_{1k,1} + H_{1k,2} + H_{1k,3} + \dots + H_{1k,10}, \quad k = 1,2,\dots,10, \quad (39)$$

$$H_{1k,1} = \begin{vmatrix} A_{10,k}^0(x_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_k A_{10,k}^1(x_1) & w_2 & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_k^2 A_{10,k}^2(x_1) & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^9 A_{10,k}^9(x_1) & w_2^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; H_{1k,2} = \begin{vmatrix} 1 & B_{10,k}^0(x_1) & 1 & \dots & 1 \\ w_k & w_2 B_{10,k}^1(x_1) & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_k^2 & w_2^2 B_{10,k}^2(x_1) & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_k^9 & w_2^9 B_{10,k}^9(x_1) & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix} \quad (40)$$

определители $H_{1k,m}$ получаются из определителя Δ_{00} из (34) заменой первого столбца на столбец $(1; w_k; w_k^2; \dots; w_k^9)^*$, и заменой m-го столбца на столбец $(B_{10,m}^0(x_1); w_m B_{10,m}^1(x_1)$; $w_m^2 B_{10,m}^2(x_1); \dots; w_m^9 B_{10,m}^9(x_1))^*$, $k = 1,2,\dots,10$, $m = 2,3,4,\dots,10$.

Аналогичным образом выводятся формулы для вычисления определителей Δ_{2k} $(k = 1,2,\dots,10)$ из (31), (32):

$$\Delta_{2k}(x_1,s) = e^{aw_k s x_1} e^{-bw_2 s x_1}\left[\Delta_{2k0} + \frac{1}{s^9}\Delta_{2k0}\left(A_{9,k}(x_1) + B_{9,1}(x_1) + \sum_{m=2}^{10} B_{9,1}(x_1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{m=2}^{10} B_{9,m}(x_1)\right) + \frac{H_{2k}}{s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right], \quad k = 1,2,\dots 10, \quad (41)$$

$$\Delta_{1k0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_k & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_1^2 & w_k^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^9 & w_k^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix} \overset{(34)}{=} \left[\begin{array}{l} \Delta_{00}, \quad k = 2; \\ 0, \quad k = 1,3,\dots,10, \end{array}\right. \quad (42)$$

$$H_{2k}=H_{2k,1}+H_{2k,2}+H_{2k,3}+\dots+H_{2k,10},\quad k=1,2,\dots,10,\tag{43}$$

$$H_{2k,1}=\begin{vmatrix}B^0_{10,k}(x_1)&1&1&\dots&1\\ w_1B^1_{10,k}(x_1)&w_k&w_3&\dots&w_{10}\\ w_1^2B^2_{10,k}(x_1)&w_k^2&w_3^2&\dots&w_{10}^2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ w_1^9B^9_{10,k}(x_1)&w_k^9&w_3^9&\dots&w_{10}^9\end{vmatrix};\quad H_{2k,2}=\begin{vmatrix}1&A^0_{10,k}(x_1)&1&\dots&1\\ w_1&w_kA^1_{10,k}(x_1)&w_3&\dots&w_{10}\\ w_1^2&w_k^2A^2_{10,k}(x_1)&w_3^2&\dots&w_{10}^2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ w_1^9&w_k^9A^9_{10,k}(x_1)&w_3^9&\dots&w_{10}^9\end{vmatrix},\tag{44}$$

определители $H_{2k,m}$ получаются из определителя Δ_{00} из (34) заменой второго столбца на столбец $(1;w_k;w_k^2;\dots;w_k^9)^*$, и заменой m-го столбца на столбец $(B^0_{10,m}(x_1);w_mB^1_{10,m}(x_1);$ $w_m^2B^2_{10,m}(x_1);\dots;w_m^9B^9_{10,m}(x_1))^*$, $k=1,2,\dots,10$, $m=1,3,4,\dots,10$.

Аналогичным образом устанавливаются формулы

$$\Delta_{33}=e^{aw_3sx_1}e^{-bw_3sx_1}\Delta_{00}\left[1+\frac{A_{9,3}(x_1)}{s^9}+\frac{H_{33}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\tag{45}$$

$$\Delta_{3k}=e^{aw_ksx_1}e^{-bw_3sx_1}\Delta_{00}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{3k}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\quad k\neq 3;\dots;\tag{46}$$

$$\Delta_{mm}=e^{aw_msx_1}e^{-bw_msx_1}\Delta_{00}\left[1+\frac{A_{9,k}(x_1)}{s^9}+\frac{H_{mm}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\quad m=1,2,\dots 10,\tag{47}$$

$$\Delta_{mk}=e^{aw_ksx_1}e^{-bw_msx_1}\Delta_{00}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{mk}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\quad m,k=1,2,\dots,10,\quad m\neq k;\dots;\tag{48}$$

$$\Delta_{10,10}=e^{aw_{10}sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\Delta_{00}\left[1+\frac{A_{9,10}(x_1)}{s^9}+\frac{H_{10,10}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\tag{49}$$

$$\Delta_{10,k}=e^{aw_ksx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\Delta_{00}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{10,k}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right],\quad m=1,2,\dots,10,\tag{50}$$

при этом определители H_{mk} $(m,k=1,2,\dots,10)$ формул (45)–(50) находятся следующим образом:

$$H_{mk}=H_{mk,1}+H_{mk,2}+H_{mk,3}+\dots+H_{mk,10},\tag{51}$$

определители $H_{mkm}(x_1)$ получаются из определителя Δ_{00} из (34) заменой m-го столбца на столбец $(A^0_{10,k}(x_1);w_kA^1_{10,k}(x_1);w_k^2B^2_{10,k}(x_1);\dots;w_k^9A^9_{10,k}(x_1))^*$, определители H_{mkp} $(m,k,p=1,2,\dots,10;\ p\neq m)$ получаются из определителя Δ_{00} из (34) заменой m-го столбца на столбец $(1;w_k;w_k^2;\dots;w_k^9)^*$, и заменой p-го столбца на столбец $B^0_{10,m}(x_1);w_mB^1_{10,m}(x_1);w_m^2B^2_{10,m}(x_1)\dots;w_m^9B^9_{10,m}(x_1))^*$.

§ 3. Изучение граничных условий (4). Подставляя в первые девять из граничных условий (4) формулы (9), (10), получаем

$$y_1^{(m_p)}(0,s)\overset{(4)}{=}0\ (p=1,2,\dots,9)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{10}C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}}=0,\ p=1,2,\dots,9.\tag{52}$$

Из последнего из граничных условий (4) с применением формул (17), (18), (24) находим

$$y_2^{(m_1)}(\pi,s) \overset{(4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{10} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_{20}(s) \neq 0} \frac{y_{21}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \frac{\Delta_2}{\Delta_{20}(s)} \frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \dots + \frac{\Delta_{10}}{\Delta_{20}(s)} \frac{y_{2,10}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0.$$

Подставляя в это уравнение формулы (29)–(33), получаем

$$\sum_{k=1}^{10} C_{1k}\Delta_{1k} \frac{y_{21}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \sum_{k=1}^{10} C_{1k}\Delta_{2k} \frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \dots +$$

$$+ \sum_{k=1}^{10} C_{1k}\Delta_{10,k} \frac{y_{2,10}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{10} C_{1k} b_{10,k} = 0, \tag{53}$$

$$b_{10,k} = \Delta_{1k} \frac{y_{21}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \Delta_{2k} \frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}} + \dots + \Delta_{10,k} \frac{y_{2,10}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}, \quad k = 1,2,\dots,10. \tag{54}$$

Система (52)–(54) представляет собой однородную систему из десяти линейных уравнений с десятью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1,10}$. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(5) *имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} \frac{y_{11}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{12}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \dots & \frac{y_{1,9}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} & \frac{y_{1,10}^{(m_1)}(0,s)}{(as)^{m_1}} \\ \frac{y_{11}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{12}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \dots & \frac{y_{1,9}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} & \frac{y_{1,10}^{(m_2)}(0,s)}{(as)^{m_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{11}^{(m_9)}(0,s)}{(as)^{m_9}} & \frac{y_{12}^{(m_9)}(0,s)}{(as)^{m_9}} & \dots & \frac{y_{1,9}^{(m_9)}(0,s)}{(as)^{m_9}} & \frac{y_{1,10}^{(m_9)}(0,s)}{(as)^{m_9}} \\ b_{10,1} & b_{10,2} & \dots & b_{10,9} & b_{10,10} \end{vmatrix} = 0, \tag{55}$$

где элементы $b_{10,k}$ $(k = 1,2,\dots,10)$ *определены формулой* (54).

Из формул (9)–(12) следует, что $\frac{y_{1k}^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}} = w_k^{m_p}\left[1 + \frac{A_{10,k}^{m_p}(0)}{s^{10}} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]$, $k = 1,2,\dots,10$, $p = 1,2,\dots,9$, а из формул (13)–(15) следует, что $A_{10,k}^{m_p}(0) = A_{10,1}^{m_p}(0) = \frac{(-2m_p)q_1(0)}{20a^{10}}$ (не зависит от k), поэтому из первой строчки определителя $f(s)$ из (55) вынесем множитель $\left[1 + \frac{A_{10,1}^{m_1}(0)}{s^{10}} + \underline{O}(\frac{1}{s^{11}})\right] \neq 0$, из второй строчки вынесем множитель $\left[1 + \frac{A_{10,1}^{m_2}(0)}{s^{10}} + \underline{O}(\frac{1}{s^{11}})\right] \neq 0$, из девятой строчки вынесем множитель

$\left[1+\frac{A_{10,1}^{m_p}(0)}{s^{10}}+\underline{O}(\frac{1}{s^{11}})\right]\neq 0$, в результате чего уравнение (55) можно переписать в следующем виде:

$$f(s)=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_9^{m_1} & w_{10}^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_9^{m_2} & w_{10}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_9} & w_2^{m_9} & \dots & w_9^{m_9} & w_{10}^{m_9} \\ b_{10,1} & b_{10,2} & \dots & b_{10,9} & b_{10,10} \end{vmatrix}=0. \tag{56}$$

Раскладывая определитель $f(s)$ из (56) по последней строчке, имеем

$$f(s)=(-1)\{b_{10,1}D_{10,1}-b_{10,2}D_{10,2}+b_{10,3}D_{10,3}-\dots+b_{10,9}D_{10,9}-b_{10,10}D_{10,10}\}=0, \tag{57}$$

где $D_{10,k}$ $(k=1,2,\dots,10)$ – алгебраические миноры к элементам $b_{10,k}$ $(k=1,2,\dots,10)$, которые находятся по формуле (54).

Для определителя $D_{10,10}$ имеем

$$D_{10,10}=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \dots & w_9^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \dots & w_9^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{m_9} & w_2^{m_9} & \dots & w_9^{m_9} \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{8m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{8m_2} \\ 1^{m_3} & z^{m_3} & z^{2m_3} & \dots & z^{8m_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{m_9} & z^{m_9} & z^{2m_9} & \dots & z^{8m_9} \end{vmatrix} =$$
$$=\det \mathrm{Wand's}(z^{m_1},z^{m_2},\dots,z^{m_9})=\prod_{\substack{k>p;\\ k,p=1,2,\dots,9}}(z^{m_k}-z^{m_p})=D_0\neq 0. \tag{58}$$

Для определителя $D_{10,1}$ с помощью свойств определителя выводим:

$$D_{10,1}=\begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \dots & w_9^{m_1} & w_{10}^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \dots & w_9^{m_2} & w_{10}^{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^{m_9} & w_3^{m_9} & \dots & w_9^{m_9} & w_{10}^{m_9} \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{8m_1} & z^{9m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{8m_2} & z^{9m_2} \\ z^{m_3} & z^{2m_3} & \dots & z^{8m_3} & z^{9m_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{m_9} & z^{2m_9} & \dots & z^{8m_9} & z^{9m_9} \end{vmatrix} \overset{(58)}{=}$$
$$=z^{m_1}z^{m_2}(\dots)z^{m_9}D_0=z^{M_9}D_0\neq 0;\quad M=\sum_{k=1}^{9}m_k. \tag{59}$$

Аналогичным способом находим

$$\begin{gathered} D_{10,2}=z^{2M_9}D_0;\quad D_{10,3}=z^{3M_9}D_0;\dots;D_{10,k}=z^{kM_9}D_0,\quad k=1,2,\dots,10;\dots; \\ D_{10,9}=z^{9M_9}D_0;\quad D_{10,10}=z^{10M_9}D_0. \end{gathered} \tag{60}$$

Подставляя формулы (58)–(60) в уравнение (57), получаем

$$f(s)=b_{10,1}z^{M_9}D_0-b_{10,2}z^{2M_9}D_0+b_{10,3}z^{3M_9}D_0-\dots+b_{10,9}z^{9M_9}D_0-b_{10,10}z^{10M_9}D_0=0,$$

откуда, поделив на $z^{M_9}D_0\neq 0$, имеем

$$f(s)=b_{10,1}-b_{10,2}z^{M_9}+b_{10,3}z^{2M_9}-\dots+b_{10,9}z^{8M_9}-b_{10,10}z^{9M_9}=0. \tag{61}$$

Применяя формулы (54), перепишем (61) в виде

$$f(s)=\sum_{k=1}^{10}\Delta_{k,1}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}-z^{M_9}\sum_{k=1}^{10}\Delta_{k,2}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}+\dots+$$
$$+z^{8M_9}\sum_{k=1}^{10}\Delta_{k,9}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}-z^{9M_9}\sum_{k=1}^{10}\Delta_{k,10}\frac{y_{2k}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}=0,$$

откуда, перегруппировывая слагаемые, получаем

$$f(s)=\frac{y_{21}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_9}\Delta_{1k}+\frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_9}\Delta_{2k}+\dots+$$
$$+\frac{y_{2,10}^{(n_1)}(\pi,s)}{(bs)^{n_1}}\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k-1}z^{(k-1)M_9}\Delta_{10,k}=0, \tag{62}$$

причем среди определителей Δ_{mk} $(m,k=1,2,\dots,10)$ в силу формул (37)–(51) основными по росту s являются определители Δ_{nn} $(n=1,2,\dots,10)$.

Используя формулы (17), (18) и (37)–(51), уравнение (62) можно выписать более подробно

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s)+\dots+f_{10}(s)=0, \tag{63}$$

$$f_1(s)=w_1^m e^{bw_1s\pi}\left[1+\frac{B_{9,1}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,1}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\times$$
$$\times\left\{e^{aw_1sx_1}e^{-bw_1sx_1}\left[1+\frac{A_{9,1}(\pi)}{s^9}+\frac{H_{11}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\right.$$
$$-z^{M_9}e^{aw_2sx_1}e^{-bw_1sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{12}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+$$
$$\left.+z^{2M_9}e^{aw_3sx_1}e^{-bw_1sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{13}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\dots\right\}, \tag{64}$$

$$f_2(s)=w_2^{n_1} e^{bw_2s\pi}\left[1+\frac{B_{9,2}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,2}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\times$$
$$\times\left\{e^{aw_1sx_1}e^{-bw_2sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{21}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\right.$$
$$-z^{M_9}e^{aw_2sx_1}e^{-bw_2sx_1}\left[1+\frac{A_{9,2}(\pi)}{s^9}+\frac{H_{22}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+$$
$$\left.+z^{2M_9}e^{aw_3sx_1}e^{-bw_2sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{23}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\dots\right\}, \tag{65}$$

$$f_3(s)=w_3^{n_1} e^{bw_3s\pi}\left[1+\frac{B_{9,3}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,3}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\times$$
$$\times\left\{e^{aw_1sx_1}e^{-bw_3sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{31}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\right.$$

$$-z^{M_9}e^{aw_2sx_1}e^{-bw_3sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{32}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+$$

$$+z^{2M_9}e^{aw_3sx_1}e^{-bw_3sx_1}\left[1+\frac{A_{9,3}(\pi)}{s^9}+\frac{H_{33}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\ldots\Bigg\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_{10}(s)=w_{10}^{n_1}e^{bw_{10}s\pi}\left[1+\frac{B_{9,10}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,10}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\times$$

$$\times\Bigg\{e^{aw_1sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{10,1}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-$$

$$-z^{M_9}e^{aw_2sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{10,2}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+$$

$$+z^{2M_9}e^{aw_3sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{10,3}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\cdots+$$

$$+z^{8M_9}e^{aw_9sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{10,9}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-$$

$$-z^{9M_9}e^{aw_{10}sx_1}e^{-bw_{10}sx_1}\left[1+\frac{A_{9,10}(\pi)}{s^9}+\frac{H_{10,10}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\Bigg\}. \tag{66}$$

Уравнение (63), перегруппировывая слагаемые в порядка их роста по переменной s, можно записать в виде:

$$f(s)=f_0(s)+\frac{\tilde{f}_9(s)}{s^9}+\frac{\tilde{f}_{10}(s)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)=0, \tag{67}$$

причем основным приближением уравнений (63) и (67) является

$$f_0(s)=w_1^{n_1}e^{aw_1sx_1}e^{b(\pi-x_1)w_1s}-w_2^{n_1}z^{M_9}e^{aw_2sx_1}e^{b(\pi-x_1)w_2s}+$$

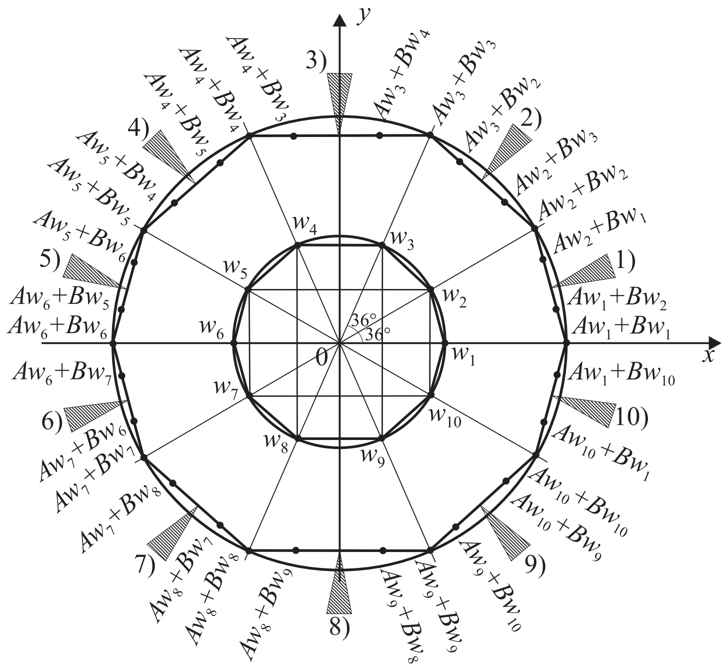
$$+w_3^{n_1}z^{2M_9}e^{aw_3sx_1}e^{b(\pi-x_1)w_3s}-\ldots-w_{10}^{n_1}z^{9M_9}e^{aw_{10}sx_1}e^{b(\pi-x_1)w_{10}s}=0. \tag{68}$$

Последнее соотношение в обозначениях $A=ax_1$, $B=b(\pi-x_1)$ принимает вид

$$f_0(s)=w_1^{n_1}e^{Aw_1s}e^{Bw_1s}-w_2^{n_1}z^{M_9}e^{Aw_2s}e^{Bw_2s}+w_3^{n_1}z^{2M_9}e^{Aw_3s}e^{Bw_3s}-\ldots-$$

$$-w_{10}^{n_1}z^{9M_9}e^{Aw_{10}s}e^{Bw_{10}s}=0. \tag{69}$$

Для нахождения корней уравнения (67)–(69) необходимо изучить индикаторную диаграмму (см. [20, гл. 12]), то есть выпуклую оболочку множества показателей экспонент, входящих в это утверждение. Следовательно, индикаторная диаграмма (см. [20, гл. 12]) уравнений (63)–(66), (67) и (68), (69) имеет следующий вид:



(70)

При этом на отрезке $[(A+B)w_k;(A+B)w_{k+1}]$ $(k=1,2,\ldots,10)$ (эти точки являются показателями экспонент, входящих в основное приближение $f_0(s)=0$ из (69)) находятся также точки Aw_k+Bw_{k+1} и $Aw_{k+1}+Bw_k$ $(k=1,2,\ldots,10)$, которые являются показателями экспонент, находящихся в уравнении (63)–(68) при $\frac{1}{s^9}$ и при $\frac{1}{s^{10}}$.

Из [20, гл. 12] следует, что корни уравнения (63)–(68) находятся в секторах бесконечно малого раствора, биссектриса которых является серединным перпендикуляром к отрезкам $[(A+B)w_k;(A+B)w_{k+1}]$ $(k=1,2,\ldots,10)$.

§ 4. Асимптотика собственных значений в секторе 1). Из вида индикаторной диаграммы следует, что для нахождения корней уравнения (63)–(68) в секторе 1) надо отбросить бесконечно малые величины и оставить только экспоненты с показателями $(A+B)w_1$, $(A+B)w_2$, Aw_1+Bw_2 и Aw_2+Bw_1. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторе индикаторной диаграммы* (70) *имеет следующий вид:*

$$\begin{gathered}
g_1(s)=w_1^{n_1}e^{Aw_1s}e^{Bw_1s}\left[1+\frac{B_{9,1}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,1}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\left[1+\frac{A_{9,1}(x_1)}{s^9}+\frac{H_{11}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\\
-w_2^{n_1}z^{M_9}e^{Aw_2s}e^{Bw_2s}\left[1+\frac{B_{9,2}(\pi)}{s^9}+\frac{B_{10,2}^{n_1}(\pi)}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]\left[1+\frac{A_{9,2}(\pi)}{s^9}+\frac{H_{22}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\\
-w_1^{n_1}z^{M_9}e^{Aw_2s}e^{Bw_1s}\left[1+\frac{B_{9,1}(\pi)}{s^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{10}}\right)\right]\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{12}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+\\
+w_2^{n_1}e^{Aw_1s}e^{Bw_2s}\left[1+\frac{B_{9,2}(\pi)}{s^9}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{10}}\right)\right]\left[0+\frac{0}{s^9}+\frac{H_{21}}{\Delta_{00}s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]=0. \qquad (71)
\end{gathered}$$

Поделив в уравнении (71) на $w_1^{n_1}e^{Aw_2s}e^{Bw_2s}\neq 0$, приведем его к виду

$$g_1(s)=[e^{(A+B)(w_1-w_2)s}\left[1+\frac{R_1}{s^9}+\frac{R_2}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]-\frac{w_2^{n_1}}{w_1^{n_1}}z^{M_9}\left[1+\frac{R_3}{s^9}+\frac{R_4}{s^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta_{10}s^{10}}\left[\frac{w_2^{n_1}}{w_1^{n_1}}H_{21}e^{(A+B)(w_1-w_2)s}-z^{M_9}H_{12}e^{B(w_1-w_2)s}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)=0. \qquad (72)$$

при этом $w_2^{n_1}\overset{(6)}{=}z^{n_1}$, $w_1^{n_1}\overset{(6)}{=}1$, $\frac{w_2^{n_1}}{w_1^{n_1}}=z^{n_1}$,

$$\begin{aligned} R_1&=A_{9,1}(x_1)+B_{9,2}(\pi), \quad R_2=B_{10,1}^{n_1}(\pi)+\frac{H_{11}(x_1)}{\Delta_{00}},\\ R_3&=A_{9,2}(x_1)+B_{9,2}(\pi), \quad R_4=B_{10,2}^{n_1}(\pi)+\frac{H_{22}(x_1)}{\Delta_{00}}. \end{aligned} \qquad (73)$$

Упорядочивая в уравнении (72), (73) величины по росту s, получаем

$$\begin{gathered} g_1(s)=[e^{(A+B)(w_1-w_2)s}-z^{n_1}z^{M_9}]+\\ +\frac{1}{s^9}[R_1e^{(A+B)(w_1-w_2)s}-R_3z^{n_1}z^{M_9}]+\\ +\frac{1}{s^{10}}[R_2e^{(A+B)(w_1-w_2)s}-R_4z^{n_1}z^{M_{15}}]+\\ +\frac{1}{\Delta_{00}s^{10}}[H_{21}z^{n_1}e^{(A+B)(w_1-w_2)s}-H_{12}z^{M_9}e^{B(w_1-w_2)s}]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{11}}\right)=0. \end{gathered} \qquad (74)$$

Основное приближение уравнения (74) имеет вид

$$\begin{gathered} e^{(A+B)(w_1-w_2)s}=z^{n_1}z^{M_9}=e^{2\pi ik}e^{\frac{2\pi i}{10}n_1}e^{\frac{2\pi i}{10}M_9}\Leftrightarrow(A+B)(w_1-w_2)s=\\ =2\pi ik+\frac{2\pi i}{10}n_1+\frac{2\pi i}{10}M_9\Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2\pi i\tilde{k}}{(A+B)(w_1-w_2)},\\ \tilde{k}=k+\frac{n_1}{10}+\frac{M_9}{10}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad M_9=\sum_{k=1}^{9}m_k. \end{gathered}$$

Поэтому справедливо следующее утверждение (см. [1, 2, 4]).

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы* (70) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,1}=\frac{2\pi i}{(A+B)(w_1-w_2)}\left[\tilde{k}+\frac{d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\frac{d_{10,k,1}}{\tilde{k}^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{11}}\right)\right], \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (75)$$

Для доказательства теоремы 6 необходимо показать, что коэффициенты $d_{9,k,1}$ и $d_{10,k,1}$ асимптотического разложения (75) находятся в явном виде.

Из формул Маклорена выводим

$$\begin{gathered} e^{(A+B)(w_1-w_2)s}\Big|_{s_{k,1}}\overset{(75)}{=}\\ =\exp\left[(A+B)(w_1-w_2)\frac{2\pi i}{(A+B)(w_1-w_2)}\left(\tilde{k}+\frac{d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\frac{d_{10,k,1}}{\tilde{k}^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{11}}\right)\right)\right]=\\ =\exp\left[2\pi i\tilde{k}+2\pi i\left(\frac{d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\ldots\right)\right]=z^{n_1}z^{M_9}\left[1+\frac{2\pi id_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\frac{2\pi id_{10,k,1}}{\tilde{k}^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{11}}\right)\right], \end{gathered} \qquad (76)$$

$$\frac{1}{s^m}\Big|_{s_{k,1}} \overset{(75)}{=} \frac{(A+B)^m(w_1-w_2)^m}{2^m\pi^m i^m}\frac{1}{\tilde{k}^m}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\right)\right], \quad m=9,\ m=10. \tag{77}$$

Подставляя формулы (76), (77) в уравнение (74), получаем

$$\begin{gathered}
z^{n_1}z^{M_9}\left[1+\frac{2\pi i d_{9,k,1}}{\tilde{k}^9}+\frac{2\pi i d_{10,k,1}}{\tilde{k}^{10}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{11}}\right)\right]- \\
-z^{n_1}z^{M_{19}}+\frac{(A+B)^9(w_1-w_2)^9}{2^9\pi^9 i^9}\frac{1}{\tilde{k}^9}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\right)\right][R_1z^{n_1}z^{M_9}-R_3z^{n_1}z^{M_9}]+ \\
+\frac{(A+B)^{10}(w_1-w_2)^{10}}{2^{10}\pi^{10}i^{10}}\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\right)\right]\left[R_2z^{n_1}z^{M_9}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\right)\right)-R_4z^{n_1}z^{M_9}\right]+ \\
+\frac{1}{\Delta_{00}}\frac{(A+B)^{10}(w_1-w_2)^{10}}{2^{10}\pi^{10}i^{10}}\frac{1}{\tilde{k}^9}\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{10}}\right)\right]\left[H_{21}z^{n_1}z^{M_9}z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}- \right. \\
\left. -H_{21}z^{n_1}z^{M_9}z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s}\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}}\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^{11}}\right)=0.
\end{gathered} \tag{78}$$

при этом на $z^{n_1}z^{M_9}\neq 0$ можно поделить.

При $\tilde{k}^0$ в уравнении (78) имеем $z^{n_1}z^{M_9}-z^{n_1}z^{M_9}=0$.

Приравнивая в (78) коэффициенты при $\frac{1}{\tilde{k}^9}$, имеем

$$d_{9,k,1}=-\frac{1}{2\pi i}\frac{(A+B)^9(w_1-w_2)^9}{2^9\pi^9 i^9}[R_1-R_3]. \tag{79}$$

Используя формулы (73), (11) и (19), находим

$$\begin{gathered}
R_1-R_3=[A_{9,1}(x_1)-A_{9,2}(x_1)]+[B_{9,1}(\pi)-B_{9,2}(\pi)]= \\
=-\frac{1}{10a^9}(w_1-w_2)\int_0^{x_1}q_1(t)dt-\frac{1}{10b^9}(w_1-w_2)\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)dt.
\end{gathered} \tag{80}$$

Подставляя формулу (80) в (79), выводим

$$d_{9,k,1}=\frac{(A+B)^9(w_1-w_2)^{10}}{10\cdot 2^{10}\pi^{10}i^{10}}\left[\frac{1}{a^9}\int_0^{x_1}q_1(t)dt+\frac{1}{b^9}\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)dt\right]. \tag{81}$$

Используя формулы (6), получаем

$$\begin{gathered}
w_1-w_2=1-e^{\frac{2\pi i}{10}}=e^{\frac{\pi i}{10}}[e^{-\frac{\pi i}{10}}-e^{\frac{\pi i}{10}}]=e^{\frac{\pi i}{10}}(-2i)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right); \\
(w_1-w_2)^{10}=e^{\pi i}(-1)^{10}2^{10}i^{10}\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{10}=(-1)^{10}2^{10}i^{10}\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{10}.
\end{gathered} \tag{82}$$

Подставляя (82) в формулу (81), находим

$$d_{9,k,1}=-\frac{(A+B)^9}{10\pi^{10}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{10}\left[\frac{1}{a^9}\int_0^{x_1}q_1(t)dt+\frac{1}{b^9}\int_{x_1}^{\pi}q_2(t)dt\right], \quad k\in\mathbb{N}. \tag{83}$$

Формула (83) показывает, что коэффициенты $d_{9,k,1}$ асимптотического разложения (75) находятся единственным образом, и приведена явная формула для их вычисления.

Приравнивая в (78) коэффициенты при $\frac{1}{k^{10}}$, находим

$$d_{10,k,1} = -\frac{(A+B)^{10}(w_1-w_2)^{10}}{2\pi i 2^{10}\pi^{10}i^{10}}[R_2-R_4]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta_{00}}\frac{(A+B)^{10}(w_1-w_2)^{10}}{2^{10}\pi^{10}i^{10}}\left[H_{21}z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s}\Big|_{k,1,\text{осн}} - H_{12}z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s}\Big|_{k,1,\text{осн}}\right], \quad (84)$$

$$R_2-R_4 = [B^{n_1}_{10,1}(\pi) - B^{n_1}_{10,2}(\pi)] + \frac{H_{11}-H_{22}}{\Delta_{00}}. \quad (85)$$

Из формул (20)–(22) имеем $B^{n_1}_{10,1}(\pi) = B^{n_1}_{10,2}(\pi) = B^{n_1}_{10,k}(\pi) = \frac{(9-2n_1)q_2(\pi)-9q_2(\pi)}{20b^{10}}$ (не зависит от k, $k=1,2,\ldots,10$), поэтому

$$B^{n_1}_{10,1}(\pi) - B^{n_1}_{10,2}(\pi) = 0. \quad (86)$$

Из формул (39), (40) и (43), (44)

$$H_{1k} = \sum_{m=1}^{10} H_{1km} - \sum_{m=1}^{10} H_{2km} = [H_{1k1}-H_{2k2}] + [H_{1k2}-H_{2k1}] + \sum_{m=3}^{10}[H_{1km}-H_{2km}], \quad (87)$$
$$k=1,2,\ldots,10.$$

Определители H_{1km} и H_{2km} $(m=3,4,\ldots,10)$ находятся по следующим формулам

$$H_{1km} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & B^0_{10,m}(x_1) & 1 & \ldots & 1 \\ w_k & w_2 & w_3 & \ldots & w_{m-1} & w_m B^1_{10,m}(x_1) & w_{m+1} & \ldots & w_{10} \\ w_k^2 & w_2^2 & w_3^2 & \ldots & w_{m-1}^2 & w_m^2 B^2_{10,m}(x_1) & w_{m+1}^2 & \ldots & w_{10}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_k^9 & w_2^9 & w_3^9 & \ldots & w_{m-1}^9 & w_m^9 B^9_{10,m}(x_1) & w_{m+1}^9 & \ldots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad (88)$$

$$H_{2km} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & B^0_{10,m}(x_1) & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_k & w_3 & \ldots & w_{m-1} & w_m B^1_{10,m}(x_1) & w_{m+1} & \ldots & w_{10} \\ w_1^2 & w_k^2 & w_3^2 & \ldots & w_{m-1}^2 & w_m^2 B^2_{10,m}(x_1) & w_{m+1}^2 & \ldots & w_{10}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^9 & w_k^9 & w_3^9 & \ldots & w_{m-1}^9 & w_m^9 B^9_{10,m}(x_1) & w_{m+1}^9 & \ldots & w_{10}^9 \end{vmatrix}. \quad (89)$$

Формулы (88), (89) показывают, что

$$H_{11m} = H_{22m} \quad \text{при} \quad m=3,4,\ldots,10. \quad (90)$$

Поэтому из формул (87) и (90) имеем

$$H_{11}-H_{22} = [H_{111}-H_{222}] + [H_{112}-H_{221}], \quad (91)$$

$$H_{111} = \begin{vmatrix} A^0_{10,1}(x_1) & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 A^1_{10,1}(x_1) & w_2 & w_3 & \ldots & w_{10} \\ w_1^2 A^2_{10,1}(x_1) & w_2^2 & w_3^2 & \ldots & w_{10}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^9 A^9_{10,1}(x_1) & w_2^9 & w_3^9 & \ldots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad H_{112} = \begin{vmatrix} 1 & B^0_{10,1}(x_1) & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 B^1_{10,1}(x_1) & w_3 & \ldots & w_{10} \\ w_1^2 & w_2^2 B^2_{10,1}(x_1) & w_3^2 & \ldots & w_{10}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^9 & w_2^9 B^9_{10,1}(x_1) & w_3^9 & \ldots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad (92)$$

$$H_{221} = \begin{vmatrix} B^0_{10,1}(x_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 B^1_{10,1}(x_1) & w_2 & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_1^2 B^2_{10,1}(x_1) & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^9 B^9_{10,1}(x_1) & w_2^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad H_{222} = \begin{vmatrix} 1 & A^0_{10,1}(x_1) & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & w_2 A^1_{10,1}(x_1) & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_1^2 & w_2^2 A^2_{10,1}(x_1) & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^9 & w_2^9 A^9_{10,1}(x_1) & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}. \quad (93)$$

Раскладывая определитель H_{111} из (92) по первому столбцу, воспользуемся формулами (35), получаем

$$H_{111} = \frac{\Delta_{00}}{10}[A^0_{10,1}(x_1) - w_1 A^1_{10,1}(x_1)(-w_1^{-1}) + w_1^2 A^2_{10,1}(x_1) w_1^{-2} - \dots +$$

$$+ w_1^8 A^8_{10,1}(x_1) w_1^{-8} - w_1^9 A^9_{10,1}(x_1)(-w_1^{-9})] = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=0}^{9} A^n_{10,1}(x_1) \overset{(15)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \frac{-90}{20a^{10}}. \quad (94)$$

Раскладывая определитель H_{222} из (93) по второму столбцу, находим, используя формулу (35) теоремы 3

$$H_{222} = \frac{\Delta_{00}}{10}[-A^0_{10,2}(x_1)(-1) + w_2 A^1_{10,2}(x_1) w_1^{-1} - w_2^2 A^2_{10,2}(x_1)(-w_1^{-2}) + \dots -$$

$$- w_2^8 A^8_{10,2}(x_1)(-w_1^{-8}) + w_2^9 A^9_{10,2}(x_1) w_1^{-9}] = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=0}^{9} A^n_{10,2}(x_1) \overset{(15)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \frac{-90}{20a^{10}} = H_{111}. \quad (95)$$

Аналогичным образом выводим

$$H_{112} \overset{(32),(35)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=1}^{9} (-1)^{n-1} w_2^n B^n_{10,2}(x_1)(-1)^{n-1} w_2^{-n} = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=1}^{9} B^n_{10,2}(x_1) \overset{(20)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \frac{-90}{20b^{10}}; \quad (96)$$

$$H_{221} \overset{(93),(95)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=1}^{9} (-1)^{n} w_1^n B^n_{10,1}(x_1)(-1)^{n} w_1^{-n} = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{n=1}^{9} B^n_{10,1}(x_1) \overset{(20)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10} \frac{-90)}{20b^{10}} = H_{112}; \quad (97)$$

Из формул (91)–(97) следует, что

$$H_{11} - H_{22} = 0, \quad (98)$$

поэтому из формул (85) и (86) имеем

$$R_2 - R_4 = 0, \quad (99)$$

значит, формула (84) с применением формул (98), (99) принимает следующий вид:

$$d_{10,k,1} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta_{00}} \frac{(A+B)^{10}(w_1 - w_2)^{10}}{2^{10}\pi^{10}(-1)^5} [H_{21} z^{-M_9} e^{A(w_1 - w_2)s} - H_{12} z^{-n_1} e^{B(w_1 - w_2)s}]|_{k,1,\text{осн}}, \quad (100)$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Из формул (39), (40) и (43), (44) имеем

$$H_{12} = H_{12,1} + H_{12,2} + \sum_{m=3}^{10} H_{12,m}; \quad H_{21} = H_{21,1} + H_{22,2} + \sum_{m=3}^{10} H_{21,m}, \tag{101}$$

при этом определители $H_{12,n}, H_{21,n}$ $(n = 1;\ n = 2)$ находятся по следующим формулам:

$$H_{12,1} = \begin{vmatrix} A^0_{10,2}(x_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_2 A^1_{10,2}(x_1) & w_2 & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_2^2 A^2_{10,2}(x_1) & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^9 A^9_{10,2}(x_1) & w_2^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad H_{12,2} = \begin{vmatrix} 1 & B^0_{10,2}(x_1) & 1 & \dots & 1 \\ w_2 & w_2 B^1_{10,2}(x_1) & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_2^2 & w_2^2 B^2_{10,2}(x_1) & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^9 & w_2^9 B^9_{10,2}(x_1) & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \tag{102}$$

$$H_{21,1} = \begin{vmatrix} B^0_{10,2}(x_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_2 B^1_{10,2}(x_1) & w_2 & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_2^2 B^2_{10,2}(x_1) & w_2^2 & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^9 B^9_{10,2}(x_1) & w_2^9 & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \quad H_{21,2} = \begin{vmatrix} 1 & A^0_{10,2}(x_1) & 1 & \dots & 1 \\ w_2 & w_2 A^1_{10,2}(x_1) & w_3 & \dots & w_{10} \\ w_2^2 & w_2^2 A^2_{10,2}(x_1) & w_3^2 & \dots & w_{10}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_2^9 & w_2^9 A^9_{10,2}(x_1) & w_3^9 & \dots & w_{10}^9 \end{vmatrix}; \tag{103}$$

определители $H_{12,m}$ $(m = 3, 4, \dots, 10)$ равны нулю, так как у них первый и второй столбцы совпадают и равны $(1; w_2; w_2^2, \dots, w_2^9)^*$.

Таким образом, формула (101) принимает следующий вид:

$$H_{12} = H_{12,1} + H_{12,2}; \quad H_{21} = H_{21,1} + H_{21,2}. \tag{104}$$

Определители $H_{12,n}, H_{21,n}$ $(n = 1;\ n = 2)$ находятся по формулам (102) и (103).

Из формул (102)–(104) и (35), раскладывая определители $H_{12,1}, H_{21,1}$ по первому столбцу, а определители $H_{12,2}$ и $H_{21,2}$ по второму столбцу, находим

$$H_{12,1} = \frac{\Delta_{00}}{10}[A^0_{10,2}(x_1) \cdot 1 - w_2 A^1_{10,2}(x_1)(-w_1^{-1}) + w_2^2 A^2_{10,2}(x_1)(w_1^{-2}) - \dots +$$
$$+ w_2^8 A^8_{10,2}(x_1)(w_1^{-8}) - w_2^9 A^9_{10,2}(x_1)(-w_1^{-9})] = \frac{\Delta_{00}}{10}[A^0_{10,2}(x_1) + q_1 A^1_{10,2}(x_1) + q_1^2 A^2_{10,2}(x_1) + \dots +$$
$$+ q_1^8 A^8_{10,2}(x_1) + q_1^9 A^9_{10,2}(x_1)]; \quad q_1 = \frac{w_2}{w_1} \overset{(6)}{=} w_2 \overset{(6)}{=} e^{\frac{2\pi i}{10}}; \tag{105}$$

$$H_{21,2} = \frac{\Delta_{00}}{10}[-A^0_{10,2}(x_1)(-1) + w_1 A^1_{10,1}(x_1) w_2^{-1} - w_1^2 A^2_{10,1}(x_1)(-w_2^{-2}) + \dots -$$
$$- w_1^8 A^8_{10,1}(x_1)(-w_2^{-8}) + w_1^9 A^9_{10,1}(x_1)(w_2^{-9})] = \frac{\Delta_{00}}{10}[A^0_{10,1}(x_1) + q_2 A^1_{10,1}(x_1) + q_2^2 A^2_{10,1}(x_1) + \dots +$$
$$+ q_2^8 A^8_{10,1}(x_1) + q_2^9 A^9_{10,1}(x_1)]; \quad q_2 = \frac{w_1}{w_2} \overset{(6)}{=} w_{10} \overset{(6)}{=} w_2^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{10}} = \bar{w}_2 = \bar{q}_1; \tag{106}$$

$$H_{12,2} = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{m=0}^{9} q_2^m B^m_{10,2}(x_1); \quad q_2 = \bar{w}_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right); \tag{107}$$

$$H_{21,1} = \frac{\Delta_{00}}{10} \sum_{m=0}^{9} q_1^m B^m_{10,1}(x_1); \quad q_1 = w_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right). \tag{108}$$

Применяя формулы (12), из (105) получаем

$$H_{12,2} = \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{1}{20a^{10}}\{[9q_1(x_1) - 9q_1(0)]\cdot 1 + w_2[7q_1(x_1) - 9q_1(0)] + w_2^2[5q_1(x_1) - 9q_1(0)] + \dots +$$
$$+ w_2^7[-5q_1(x_1) - 9q_1(0)] + w_2^8[-7q_1(x_1) - 9q_1(0)] + w_2^9[-9q_1(x_1) - 9q_1(0)]\} =$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{1}{20a^{10}}\{-9q_1(0)W_2 + q_1(x_1)\Phi_2\}; \tag{109}$$

$$W_2 = 1 + w_2 + w_1^2 + \dots + w_2^7 + w_2^8 + w_2^9 \overset{(6)}{=} 1 + w_2 + w_3 + w_4 + \dots + w_8 + w_9 + w_{10} \overset{(7)}{=} 0; \tag{110}$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{9}[10 - (2m-1)]w_2^m = \sum_{m=0}^{9} e^{\frac{2\pi i}{10}m}[10 - (2m+1)] =$$
$$= \sum_{m=0}^{9}[10 - (2m+1)]\left[\cos\left(\frac{2\pi}{10}m\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{10}m\right)\right] = R_2 + iV_2; \tag{111}$$
$$R_2 = \sum_{m=0}^{9}[10 - (2m+1)]\cos\left(\frac{2\pi}{10}m\right); \quad V_2 = \sum_{m=0}^{9}[10 - (2m+1)]\sin\left(\frac{2\pi}{10}m\right).$$

Аналогичным образом из формул (106)–(108) и (109)–(111) выводятся следующие формулы:

$$H_{21,2} \overset{(106)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{q_1(x_1)}{20a^{10}}[R_2 - iV_2] \overset{(109)-(111)}{=} \bar{H}_{12,1};$$
$$H_{21,1} \overset{(108)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{q_2(x_1)}{20b^{10}}[R_2 + iV_2]; \tag{112}$$
$$H_{12,2} \overset{(107)}{=} \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{q_2(x_1)}{20b^{10}}[R_2 - iV_2] = \bar{H}_{21,1}. \tag{113}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} R_2 + iV_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + V_2^2}} + \frac{V_2}{\sqrt{R_2^2 + V_2^2}}i = \cos(\varphi_{10}) + i\sin(\varphi_{10}) = e^{i\varphi_{10}}; \\ \varphi_{10} = \arccos\left(\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + V_2^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{V_2}{\sqrt{R_2^2 + V_2^2}}\right). \end{gathered} \tag{114}$$

Тогда в формуле (100) с учетом (112)–(114) имеем

$$[H_{21}z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s} - H_{12}z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s}]\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} \overset{(104)}{=}$$
$$= [(H_{21,1} + H_{21,2})z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s} - (H_{12,1} + H_{12,2})z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s}]_{s=\frac{2\pi i\tilde{k}}{(A+B)(w_1-w_2)}} =$$
$$= \frac{\Delta_{00}}{10}\frac{1}{20}\left\{\left[\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}e^{i\varphi_{10}} + \frac{q_1(x_1)}{a^{10}}e^{-i\varphi_{10}}\right]z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s_{k,1,\text{осн}}} -\right.$$
$$\left.-\left[\frac{q_1(x_1)}{a^{10}}e^{i\varphi_{10}} + \frac{q_2(x_1)}{b^{10}}e^{-i\varphi_{10}}\right]z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s_{k,1,\text{осн}}}\right\}_1. \tag{115}$$

Перегруппируем в (115) слагаемые, учтем, что $s_{k,1,\text{осн}} \overset{(75)}{=} \frac{2\pi i\tilde{k}}{(A+B)(w_1-w_2)}$, получим

$$\{\dots\}_1 = \frac{q_1(x_1)}{a^{10}}\left[e^{-i\varphi_{10}}e^{-\frac{2\pi i}{10}M_9}e^{\frac{A}{A+B}2\pi i\tilde{k}} - e^{i\varphi_{10}}e^{-\frac{2\pi i}{10}n_1}e^{\frac{B}{A+B}2\pi i\tilde{k}}\right] -$$

$$-\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}\left[e^{-i\varphi_{10}}e^{-\frac{2\pi i}{10}n_1}e^{\frac{B}{A+B}2\pi i\tilde{k}}-e^{i\varphi_{10}}e^{-\frac{2\pi i}{10}M_9}e^{\frac{A}{A+B}2\pi i\tilde{k}}\right]=$$

$$=\frac{q_1(x_1)}{a^{10}}e^{-\frac{\pi i}{10}M_9}e^{-\frac{\pi i}{10}n_1}e^{\frac{A+B}{A+B}\pi i\tilde{k}}\left[e^{-i\varphi_{10}}e^{-\frac{\pi i}{10}M_9}e^{\frac{\pi i}{10}n_1}e^{\frac{A-B}{A+B}\pi i\tilde{k}}-e^{i\varphi_{10}}e^{\frac{\pi i}{10}M_9}e^{-\frac{\pi i}{10}n_1}e^{-\frac{A+B}{A+B}\pi i\tilde{k}}\right]-$$

$$-\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}e^{-\frac{\pi i}{10}n_1}e^{-\frac{\pi i}{10}M_9}e^{\frac{A+B}{A+B}\pi i\tilde{k}}\left[e^{-i\varphi_{10}}e^{-\frac{\pi i}{10}n_1}e^{\frac{\pi i}{10}M_9}e^{-\frac{A+B}{A+B}\pi i\tilde{k}}-e^{i\varphi_{10}}e^{\frac{\pi i}{10}n_1}e^{-\frac{\pi i}{10}M_9}e^{\frac{A-B}{A+B}\pi i\tilde{k}}\right]. \quad (116)$$

Учтем, что $\tilde{k}\overset{(75)}{=}k+\frac{M_9}{10}+\frac{n_1}{10}$, $k\in\mathbb{N}$, преобразуем формулу (116) к следующему виду:

$$\{\dots\}_1=2i(-1)^k\left[\frac{q_1(x_1)}{a^{10}}+\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}\right]\sin\left[\frac{A-B}{A+B}\pi\tilde{k}-\varphi_{10}-\frac{\pi}{10}M_9+\frac{\pi}{10}n_1\right]. \quad (117)$$

Используя формулу (117), имеем из (115)

$$[H_{21}z^{-M_9}e^{A(w_1-w_2)s}-H_{12}z^{-n_1}e^{B(w_1-w_2)s}]\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}=\frac{\Delta_{00}}{8\cdot 25}\{\dots\}_1=$$

$$=\frac{\Delta_{00}}{8\cdot 25}(2i)(-1)^k\left[\frac{q_1(x_1)}{a^{10}}+\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}\right]\sin\left[\frac{A-B}{A+B}\pi\tilde{k}-\varphi_{10}-\frac{\pi}{10}M_9+\frac{\pi}{10}n_1\right]. \quad (118)$$

Подставляя формулу (118) в формулу (100), выводим

$$d_{10,k,1}=\frac{(-1)^{k+1}(A+B)^{10}(\sin(\frac{\pi}{10}))^{10}}{8\pi 25\pi^{10}}\left[\frac{q_1(x_1)}{a^{10}}+\frac{q_2(x_1)}{b^{10}}\right]\sin\left[\frac{A-B}{A+B}\pi\tilde{k}-\varphi_{10}-\frac{\pi}{10}M_9+\frac{\pi}{10}n_1\right],$$

$$k\in\mathbb{N};\quad A=ax_1;\quad B=b(\pi-x_1);\quad M_9=\sum_{k=1}^{9}m_k;\quad \tilde{k}=k+\frac{M_9+n_1}{10}. \quad (119)$$

Формула (119) показывает, что коэффициенты $d_{10,k,1}$ асимптотического разложения (75) находятся единственным образом, тем самым теорема 6 доказана.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *1) Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(5) *в секторах индикаторной диаграммы* (70) *имеет следующий вид:*

$$s_{k,2}\overset{(75)}{=}s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{10}};\quad s_{k,3}=s_{k,2}e^{\frac{2\pi i}{10}}=s_{k,1}e^{\frac{4\pi i}{10}};\dots;$$

$$s_{k,m}=s_{k,m-1}e^{\frac{2\pi i}{10}}=s_{k,1}e^{\frac{2\pi i(m-1)}{10}},\quad m=1,2,3,\dots,10.$$

2) При этом $\lambda_{k,m}=s_{k,m}^{10}$, $k\in\mathbb{N}$, $m=1,2,3,\dots,10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидский В.В., Садовничий В.А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1. № 2. С. 52–59.

2. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 65. № 4. С. 558–566.

3. *Чернятин В.А.* Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 206–215.

4. *Садовничий В.А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Математический сборник. 1967. Т. 72. № 2. С. 293–310.

5. *Ильин В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22. № 5. С. 698–723.

6. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.

7. *Будаев В.Д.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 6. С. 941–952.

8. *Митрохин С.И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 530–532.

9. *Gottlieb H.P.W.* Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients // Journal of Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 132. P. 123–137.

10. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 47–108.

11. *Митрохин С.И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия 1: математика, механика. 2009. № 3. С. 14–17.

12. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.

13. *Савчук А.М.* Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма-Лиувилля с δ-потенциалом // УМН. 2000. Т. 55. № 6 (336). С. 155–156.

14. *Митрохин С.И.* О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1808–1811.

15. *Митрохин С.И.* Об асимптотике спектра краевой задачи для дифференциального оператора высокого порядка с суммируемым потенциалом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2128–2137. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137.

16. *Гуревич А.П., Хромов А.П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Математические заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 3–15.

17. *Митрохин С.И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. 1997. Т. 356. № 1. С. 13–15.

18. *Мухтаров О.Ш., Кадакал М.* Спектральные свойства одной задачи типа Штурма-Лиувилля с разрывным весом // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. № 4.

С. 860–875.

19. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

20. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

21. *Садовничий В.А., Любишкин В.А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 109–116.

Поступила в редакцию 10 января 2018 г.
Прошла рецензирование 12 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.

Митрохин Сергей Иванович, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательского вычислительного центра, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Для цитирования: *Митрохин С.И.* Об изучении спектральных свойств дифференциальных операторов четного порядка с разрывной весовой функцией // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 74–99. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-74-99

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-74-99

ABOUT THE STUDY OF SPECTRAL PROPERTIES OF DIFFERENTIAL OPERATORS OF EVEN ORDER WITH DISCONTINUOUS WEIGHT FUNCTION

© **S. I. Mitrokhin**

Lomonosov Moscow State University
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Abstract. The boundary value problem for a differential operator of high even order, whose coefficients are discontinuous functions at some interior point of the segment on which the operator is considered, is studied. At the point of discontinuity of the coefficients, certain conditions of «conjugation» that follow from the physical conditions are required. The boundary conditions of the considered boundary value problem are separated and depend on several parameters. Thus simultaneously the spectral properties of a family of differential operators are studied. The weight function of the operator is piecewise constant on the interval of the definition of the differential operator. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of the solutions of the differential equations determining the operator under investigation is derived. Using this asymptotics, the conditions of «conjugation» are studied. The obtained formulas allow to investigate the boundary conditions of the considered boundary value problem. As a result, we have derived an equation for the eigenvalues of the studied operator. It is proved that the eigenvalues of the operator are the roots of some entire function. The indicator diagram of the equation for the eigenvalues of the operator is studied. It is proved that the spectrum of the operator is discrete. In different sectors of the indicator diagram, the asymptotics of the eigenvalues of the studied operator is found, depending on the parameters of the boundary conditions. The found formulas allow us to find the asymptotics of the eigenfunctions of the operator and to calculate the regularized traces of this operator.
Keywords: differential operator; boundary value problem; spectral parameter; weight function; asymptotics of the eigenvalues; eigenfunctions

REFERENCES

1. Lidskiy V.V., Sadovnichiy V.A. Regulyarizovannye summy korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Regularized sums of the roots of one class of entire functions]. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya – Functional Analysis and Its Applications*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 52–59. (In Russian).

2. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. Asimptoticheskie formuly dlya korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Asymptotic formulas for the roots of one class of entire functions]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1968, vol. 65, no. 4, pp. 558–566. (In Russian).

3. Chernyatin V.A. Asimptotiki vysshego poryadka spektra operatora Shturma-Liuvillya [The asymptotics of the higher order of the spectrum of Sturm-Liouville operator]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 206–215. (In Russian).

4. Sadovnichiy V.A. O sledakh obyknovennykh differentsial'nykh operatorov vysshikh poryadkov [About traces of ordinary differential operators of higher orders]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 293–310. (In Russian).

5. Ilin V.A. O skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam v tochkakh razryva koeffitsientov differentsial'nogo operatora [About the convergence of expansions for eigenfunction at points of discontinuity of coefficients of the differential operator]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 698–723. (In Russian).

6. Ilin V.A. Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti Rissa kornevykh vektorov razryvnykh operatorov vtorogo poryadka [Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of the eigenvectors for discontinuous operators of the second order]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1980, vol. 22, no. 12, pp. 2059–2071. (In Russian).

7. Budaev V.D. O bezuslovnoy bazisnosti na zamknutom intervale sistem sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy operatora vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami [About an unconditional basis property on the closed interval systems of eigen and adjoint functions for second order operator with discontinuous coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 941–952. (In Russian).

8. Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov s razryvnymi koeffitsientami [Spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532. (In Russian).

9. Gottlieb H.P.W. Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1988, vol. 132, pp. 123–137.

10. Vinokurov V.A., Sadovnichiy V.A. Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy kraevoy zadachi Shturma-Liuvillya na otrezke s summiruemym potentsialom [Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville boundary value problem on a segment with a summable potential]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 47–108. (In Russian).

11. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsial'nogo operatora chetvertogo poryadka s summiruemymi koeffitsientami [The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: matematika, mekhanika – Moscow State University Bulletin. Series 1. Mathematics. Mechanics*, 2009, no. 3, pp. 14–17. (In Russian).

12. Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Operatory Shturma-Liuvillya s singulyarnymi potentsialami [Sturm-Liouville operators with singular potentials]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 897–912. (In Russian).

13. Savchuk A.M. Regulyarizovannyy sled pervogo poryadka operatora Shturma-Liuvillya s δ-potentsialom [Regularized trace of the first order for Sturm-Liouville operator with deltapotential]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, no. 6 (336), pp. 155–156. (In Russian).

14. Mitrokhin S.I. O spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov nechetnogo poryadka s summiruemym potentsialom [On the spectral properties of odd-order differential operators with integrable potential]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 1808–1811. (In Russian).

15. Mitrokhin S.I. Ob asimptotike spektra kraevoy zadachi dlya differentsial'nogo operatora vysokogo poryadka s summiruemym potentsialom [About research of the asymptotic behavior of the spectrum of a boundary value problem for the differential operator of a high order with a summable potential]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki*

– *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, vol. 21, no. 6, pp. 2128–2137. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2128-2137. (In Russian).

16. Gurevich A.P., Khromov A.P. Operatory differentsirovaniya pervogo i vtorogo poryadkov so znakoperemennoy vesovoy funktsiey [Operators of differentiation of the first and second orders with sign-variable weight function]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, no. 1, pp. 3–15. (In Russian).

17. Mitrokhin S.I. O nekotorykh spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey [About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15. (In Russian).

18. Mukhtarov O.Sh., Kadakal M. Spektral'nye svoystva odnoy zadachi tipa Shturma-Liuvillya s razryvnym vesom [Spectral properties of one problem of Sturm-Liouville type with discontinuous weight]. Sibirskiy matemati*cheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, no. 4, pp. 860–875. (In Russian).

19. Naymark M.A. Lineynye differentsial'nye operatory [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 528 p. (In Russian).

20. Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnye uravneniya [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p. (In Russian).

21. Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A. O nekotorykh novykh rezul'tatakh teorii regulyarizovannykh sledov differentsial'nykh operatorov [About some new results in the theory of regularized traces of differential operators]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116. (In Russian).

Received 10 January 2018
Reviewed 12 February 2018
Accepted for press 20 February 2018

Mitrokhin Sergey Ivanovich, Lomonosov Moscow State University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Computing Center, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

For citation: Mitrokhin S.I. Ob izuchenii spektral'nyh svoystv differentsial'nyh operatorov chetnogo poryadka s razryvnoy vesovoy funktsiey [About the study of spectral properties of differential operators of even order with discontinuous weight function]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 74–99. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-74-99 (In Russian, Abstr. in Engl.).